THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2019

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Cho f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{1+\cos 2x},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}+1$ **D.** $2\sqrt{2}-1$

Câu 2. Cho hình chóp $SABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CA. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SN bằng

A. $\frac{a}{4}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt{17}}$ **C.** $\frac{a}{17}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Câu 3. Hàm số $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}-3x^2+6x$ đạt giá trị lớn nhất khi x bằng

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** Một giá trị khác

Câu 4. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9+99+...+\overbrace{99...9}^{n}}{10^n}$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** $\frac{10}{9}$ **D.** $\frac{10}{81}$

Câu 5. Cho tứ diện $OABC$ có các góc tại đỉnh O đều bằng 90^0 và $OA=a, OB=b, OC=c$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện. Thể tích của khối tứ diện $GABC$ bằng

A. $\frac{abc}{6}$ **B.** $\frac{abc}{8}$ **C.** $\frac{abc}{4}$ **D.** $\frac{abc}{24}$

Câu 6. Một cuộc họp có sự tham gia của 5 nhà Toán học trong đó có 3 nam và 2 nữ, 6 nhà Vật lý trong đó có 3 nam và 3 nữ và 7 nhà Hóa học trong đó có 4 nam và 3 nữ. Người ta muốn lập một ban thư kí gồm 4 nhà khoa học với yêu cầu phải có đủ cả ba lĩnh vực (Toán, Lý, Hóa) và có cả nam lẫn nữ. Nếu mọi người đều bình đẳng như nhau thì số cách lập một ban thư kí như thế là

A. 1575 **B.** 1440 **C.** 1404 **D.** 171

Câu 7. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(1+x+x^2+\frac{1}{x}\right)^9$ bằng

A. 13051 **B.** 13050 **C.** 13049 **D.** 13048

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ cho điểm $M(a,b,c)$. Gọi A, B, C theo thứ tự là điểm đối xứng với M qua mặt phẳng (yOz), (zOx), (xOy). Trọng tâm của tam giác ABC là

A. $G\left(\frac{-a+b+c}{3},\frac{a-b+c}{3},\frac{a+b-c}{3}\right)$

B. $G\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$

C. $G\left(\frac{2a}{3},\frac{2b}{3},\frac{2c}{3}\right)$

D. $G\left(\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3}\right)$

Câu 9. Cho hàm số $y=\left|x^3-x\right|+m$ với m là một tham số thực. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A. 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

Câu 10. Một nhóm học sinh gồm 6 bạn nam và 4 nữ đứng ngẫu nhiên thành một hàng. Xác suất để có đúng 2 trong 4 bạn nữ đứng cạnh nhau là

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 11. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. M là một điểm bất kì bên trong tứ diện. Tổng khoảng cách từ M tới các mặt của khối tứ diện là

A. Một đại lượng phụ thuộc vị trí của M **B.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$

C. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$

Câu 12. Cho $\tan x=m$. Giá trị của $\frac{\sin x-\cos x}{2\sin^3 x-\cos x}$ bằng

A. 0 **B.** $\frac{m}{m^2+1}$

C. $\dfrac{m^2-1}{2m^2-m+1}$ D. $\dfrac{m^2+1}{2m^2+m+1}$

Câu 13. Số mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của một hình chóp tứ giác là

A. 1 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 14. Cho tứ diện $SABC$ có trọng tâm G. Một mặt phẳng qua G cắt các tia SA, SB và SC theo thứ tự tại A', B' và C'. Đặt $\dfrac{SA'}{SA}=m$, $\dfrac{SB'}{SB}=n$, $\dfrac{SC'}{SC}=p$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng

A. $\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{p^2}=4$

B. $\dfrac{1}{mn}+\dfrac{1}{np}+\dfrac{1}{pm}=4$

C. $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}=4$

D. $m+n+p=4$

Câu 15. Giá trị của tổng

$$1+2^2C_{99}^2+2^4C_{99}^4+...+2^{98}C_{99}^{98}$$

bằng

A. $\dfrac{3^{99}}{2}$ B. $\dfrac{3^{99}+1}{2}$ C. 3^{99} D. $\dfrac{3^{99}-1}{2}$

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, độ dài cạnh bên cũng bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và BC. Góc giữa MN và SC bằng

A. 30^0 B. 45^0 C. 60^0 D. 90^0

Câu 17. Bất phương trình

$$\log_2(\log_4 x)+\log_4(\log_2 x)\le 2$$

có tập nghiệm là

A. $(1,16]$ B. $[16,+\infty)$ C. $(0,16]$ D. $(2,16]$

Câu 18. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=1$ và $u_n=u_{n-1}+n$ với mọi $n\ge 2$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{n^2}$ bằng

A. 0 B. 1 C. 2 D. $\dfrac{1}{2}$

Câu 19. Cho z là một số phức khác 0. Miền giá trị của $\dfrac{|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|}{|z|}$ là

A. $[2,+\infty)$ B. $[\sqrt{2},2]$ C. $[2,4]$ D. $[2,2\sqrt{2}]$

Câu 20. Hàm số

$$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+\cdots+(x-n)^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất khi x bằng

A. $\dfrac{n+1}{2}$ B. $\dfrac{n}{2}$ C. $\dfrac{n(n+1)}{2}$ D. $\dfrac{n-1}{2}$

Câu 21. Phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$ và $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z}{-2}$ là

A. $-11x+5y+7z-1=0$ B. $11x-5y-7z+1=0$

C. $-11x+5y+7z+1=0$ D. $-11x+5y+7z+11=0$

Câu 22. Cho $\log_{27}|a|+\log_9 b^2=5$ và $\log_{27}|b|+\log_9 a^2=7$. Giá trị của $|a|-|b|$ bằng

A. 0 B. 1 C. 27 D. 702

Câu 23. Điều kiện cần và đủ để

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+m^2-9m+4=0$$

là phương trình của một mặt cầu là

A. $m>0$ B. $m<-1$ hoặc $m>10$

C. $-1\le m\le 10$ D. $-1<m<10$

Câu 24. Trên giá sách có 20 cuốn sách. Số cách lấy ra 3 cuốn sách sao cho giữa hai cuốn lấy được bất kì luôn có ít nhất hai cuốn không được lấy là

A. C_{16}^3 B. A_{16}^3 C. C_{20}^3 D. A_{20}^3

Câu 25. Một hình lăng trụ có tổng số đỉnh và số cạnh bằng 200 thì có số đỉnh là

A. 100 B. 80 C. 60 D. 40

Câu 26. Giá trị của tổng $1+\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+...+\dfrac{1}{i^{2019}}$ (ở đó $i^2=-1$) bằng

A. 0 B. i C. -1 D. i

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Giá trị của $f^{(n)}(0)$ bằng

A. 0 B. 1 C. $\dfrac{n!(1+(-1)^n)}{2}$ D. $\dfrac{-n!(1+(-1)^n)}{2}$

Câu 28. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$$

là

A. một đoạn thẳng

B. một đường thẳng

C. một đường tròn

D. một elip

Câu 29. Số $a>0$ thỏa mãn $\int_a^2 \frac{1}{x^3+x}dx = \ln 2$ là

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{1}{4}$

Câu 30. Đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{mx^2+(4-2m)x-6}{2(x+9)}$ cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất khi m bằng

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. 1

Câu 31. Thể tích khối trụ nội tiếp một mặt cầu có bán kính R không đổi có thể đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}R^3$ B. $\frac{\pi}{9\sqrt{3}}R^3$

C. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}R^3$ D. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}R^3$

Câu 32. Cho hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}\cdot$ Giá trị của

$$f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{2}{100}\right)+...+f\left(\frac{99}{100}\right)$$

bằng

A. 49 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{99}{2}$ D. 50

Câu 33. Gieo một con súc sắc năm lần liên tiếp. Xác suất để tích các số chấm xuất hiện ở năm lần gieo đó là một số tự nhiên có tận cùng bằng 5 là

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{211}{7776}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{486}$

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho hai điểm $A(3, 2, 1)$ và $B(-1, 4, -3)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (xOy) sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất là

A. $M(-5, 1, 0)$ B. $M(5, 1, 0)$

C. $M(5, -1, 0)$ D. $M(-5, -1, 0)$

Câu 35. Hình vuông nội tiếp elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ thì có diện tích bằng

A. $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$ B. $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

C. a^2+b^2 D. $|ab|$

Câu 36. Cho $\tan x-\tan y=10$ và $\cot x-\cot y=5$. Giá trị của $\tan(x-y)$ là

A. 10 B. -10 C. $-\frac{1}{10}$ D. $\frac{1}{10}$

Câu 37. Giá trị của tổng $C_9^9+C_{10}^9+...+C_{99}^9$ bằng

A. C_{100}^9 B. C_{99}^{10} C. C_{100}^{10} D. 2^{99}

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $A(0, -1, 2)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất. Phương trình của (P) là

A. $y-2z+5=0$ B. $-y+2z+5=0$

C. $y-2z-5=0$ D. $x-y+2z-5=0$

Câu 39. Số mặt đối xứng của một hình chóp tứ giác đều là

A. 0 B. 1. C. 2 D. 4

Câu 40. Một túi đựng 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 tới 20. Rút ngẫu nhiên ra hai tấm thẻ. Xác suất để tích của hai số ghi trên hai tấm thẻ rút được là một số chia hết cho 4 bằng

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 41. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$ và $\widehat{BSC}=120^0, \widehat{CSA}=90^0, \widehat{ASB}=60^0$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Độ dài đoạn SG bằng

A. $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$

B. $\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab-bc}$

C. $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab-ca}$

D. $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab-bc}$

Câu 42. Kí hiệu M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\sqrt{4-x^2}$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $\frac{25}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 4 D. $\frac{15}{4}$

☞

Câu 43. Kí hiệu M và m theo thứ tự là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x + \cos^5 x$. Khi đó $M - m$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Descartes Oxy cho hai điểm $A(1, a)$ và $B(-a, 2)$. Diện tích tam giác OAB có thể đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 45. Số các số tự nhiên có 5 chữ số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần là

A. A_{10}^5 **B.** C_{10}^5 **C.** $2C_9^5 + C_9^4$ **D.** $2C_9^5$

Câu 46. Giả sử $\dfrac{1+2i}{1-i}$ là một nghiệm (phức) của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương. Thế thì $a + b + c$ nhỏ nhất bằng

A. 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 11

Câu 47. Điều kiện của tham số m để phương trình $8^{\log_3 x} - 3x^{\log_3 2} = m$ có nhiều hơn một nghiệm là

A. $m < -2$ **B.** $m > 2$

C. $-2 < m < 0$ **D.** $-2 < m < 2$

Câu 48. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = x^2$ và $y = 2 - |x|$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$ **B.** 2 **C.** $\dfrac{7}{3}$ **D.** $\dfrac{7}{6}$

Câu 49. Số các giá trị nguyên dương của k thỏa mãn 2^k có 100 chữ số khi viết trong hệ thập phân là

A. 10 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 5

Câu 50. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2^x - 1)(3^x - 1)\ldots.(n^x - 1)}{x^{n-1}}$ bằng

A. $\ln(n!)$ **B.** $\ln 2 \ln 3 \ldots \ln n$

C. $n!$ **D.** $2 + 3 + \ldots + n$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội)

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

1D	2B	3C	4C	5D	6C	7A	8B	9A	10D
11B	12D	13C	14C	15D	16A	17A	18D	19D	20A
21C	22D	23D	24A	25B	26A	27D	28C	29B	30B
31A	32C	33B	34B	35A	36B	37C	38A	39D	40B
41D	42A	43C	44B	45C	46B	47C	48C	49C	50B

Câu 1. Chọn D.

Ta có $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{0} f(x)dx + \int_0^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$

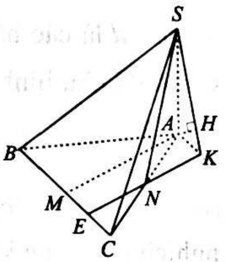
$$= -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{0} f(-u)du + \int_0^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} f(-u)du + \int_0^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} [f(x)+f(-x)]dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}\left|\cos x\right| dx = \sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x dx\right)$$

$$= 2\sqrt{2}-1.$$

Câu 2. Chọn B.



Gọi E là trung điểm của MC. Qua A kẻ một đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng NE tại K. Kẻ $AH \perp SK$ $(H \in SK)$. Ta có $AM \,//\, KE \Rightarrow AM \,//\, (SKE)$. Do đó $d(AM, SN) = d(A,(SKE))$.

Ta dễ chứng minh được $AH \perp (SKE)$ nên $d(A,(SKE)) = AH$. Tam giác SAK vuông ở A có AH là đường cao nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{16}{a^2} = \frac{17}{a^2}.$$

Suy ra $AH = \frac{a}{\sqrt{17}}$.

Câu 3. Chọn C.

Áp dụng kết quả cơ bản $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$ ta được

$$f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{5-x} - 3(x-1)^2 + 3$$
$$\le \sqrt{2(3+x+5-x)} + 3 = 7.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Câu 4. Chọn C.

Chú ý kết quả cơ bản $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$ với $a > 1$. Gọi L là giá trị của giới hạn cần tìm. Thế thì

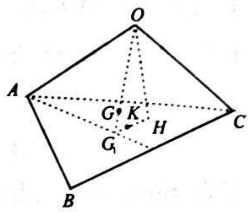
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(10-1)+(10^2-1)+\ldots+(10^n-1)}{10^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10+10^2+\ldots+10^n - n}{10^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+10+\ldots+10^{n-1}}{10^{n-1}} - \frac{n}{10^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{10^n-1}{9.10^{n-1}} - \frac{n}{10^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{10}{9} - \frac{1}{9.10^{n-1}} - \frac{n}{10^n}\right) = \frac{10}{9}.$$

Câu 5. Chọn D.



Gọi G_1 là trọng tâm của tam giác ABC; H và K lần lượt là hình chiếu của O và G trên mặt phẳng (ABC). Khi đó

$$\frac{V_{GABC}}{V_{OABC}} = \frac{GK}{OH} = \frac{G_1G}{G_1O} = \frac{1}{4}.$$

Do đó $V_{GABC} = \frac{1}{4}V_{OABC} = \frac{abc}{24}$.

Câu 6. Chọn C.

Số cách chọn 4 nhà khoa học mà có đủ cả ba lĩnh vực là $C_5^2C_6^1C_7^1 + C_5^1C_6^2C_7^1 + C_5^1C_6^1C_7^2 = 1575$.

Số cách chọn 4 nhà khoa học nam mà có đủ cả ba lĩnh vực là $C_3^2C_3^1C_4^1 + C_3^1C_3^2C_4^1 + C_3^1C_3^1C_4^2 = 126$.

Số cách chọn 4 nhà khoa học nữ mà có đủ cả ba lĩnh vực là $C_2^2C_3^1C_3^1 + C_2^1C_3^2C_3^1 + C_2^1C_3^1C_3^2 = 45$.

Vậy số cách lập một ban thư kí thỏa mãn yêu cầu là:

$$1575 - 126 - 45 = 1404.$$

Câu 7. Chọn A.

Ta có $\left(1+x+x^2+\frac{1}{x}\right)^9 = (1+x^2)^9\left(1+\frac{1}{x}\right)^9$

$$= \left(\sum_{k=0}^{9} C_9^k x^{2k}\right)\left(\sum_{i=0}^{9} C_9^i \frac{1}{x^i}\right) = \sum_{k=0}^{9}\sum_{i=0}^{9} C_9^k C_9^i x^{2k-i}.$$

Từ đây ta cho $2k - i = 0$ thì tìm được 5 cặp (i, k) thỏa mãn là (0, 0), (2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4). Vậy số hạng không chứa x là

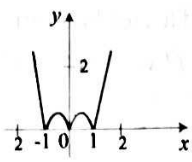
$$1 + C_9^1C_9^2 + C_9^2C_9^4 + C_9^3C_9^6 + C_9^4C_9^8 = 13051.$$

Câu 8. Chọn B.

Dễ thấy các điểm A, B, C có tọa độ là $A(-a,b,c)$, $B(a,-b,c)$, $C(a,b,-c)$. Thế thì tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC sẽ là $G\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)$.

Câu 9. Chọn **A.**

Số điểm cực trị của hàm số đã cho cũng chính là số điểm cực trị của hàm $y=\left|x^3-x\right|$. Dựa vào tính chất của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối, chúng ta dễ dàng vẽ được đồ thị của hàm $y=\left|x^3-x\right|$ như hình bên. Từ đồ thị ta nhận thấy hàm số này có 5 điểm cực trị.



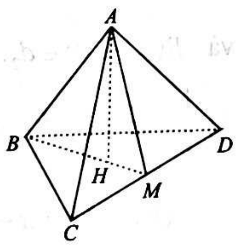
Câu 10. Chọn **D.**

Chọn 2 bạn nữ trong 4 bạn thì có C_4^2 cách. Ta "buộc" hai bạn này vào nhau coi như một bạn nữ thông thường. Có 2 cách để "buộc" như thế (vì có thể là *ab* hoặc *ba*). Lúc này nhóm học sinh gồm có 6 bạn nam và 3 bạn nữ (trong đó có một bạn nữ "đặc biệt"). Ta xếp vị trí cho các bạn nam trước thì có $6!$ cách. Giữa các bạn nam có 5 vị trí xen kẽ cùng với 2 vị trí đầu hàng và cuối hàng. Bây giờ ta xếp 3 bạn nữ vào 3 trong 7 vị trí kia thì có A_7^3 cách. Vậy xác suất cần tìm bằng

$$\frac{2C_6^4 6!A_7^3}{10!}=\frac{1}{2}.$$

Câu 11. Chọn **B.**

Gọi x, y, z, t lần lượt là khoảng cách từ M tới các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC). Ta có



$$V_{MBCD}=\frac{x}{3}.S_{BCD},\ V_{MCDA}=\frac{y}{3}.S_{CDA}$$

$$V_{DAB}=\frac{z}{3}.S_{DAB},\ V_{MABC}=\frac{t}{3}.S_{ABC}.$$

Cộng lại ta thu được (chú ý rằng $S_{BCD}=S_{CDA}=S_{DAB}=S_{ABC}=S$)

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}(x+y+z+t).S.$$

Suy ra $(x+y+z+t)=\frac{3V_{ABCD}}{S}=h$ với h là độ dài đường cao của tứ diện đều $ABCD$. Ta có

$$h=AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{AB^2-\frac{4}{9}BM^2}$$

$$=\sqrt{AB^2-\frac{4}{9}(BC^2-CM^2)}$$

$$=\sqrt{a^2-\frac{4}{9}\left(a^2-\frac{1}{4}a^2\right)}=a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Vậy $x+y+z+t=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Câu 12. Chọn **D.**

Ta có

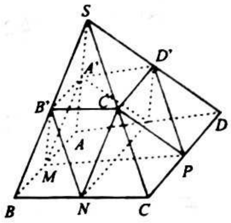
$$\frac{\sin x-\cos x}{2\sin^3 x-\cos x}=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x)}{2\sin^3 x-\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}-1\right)\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)}{\frac{2\sin^3 x}{\cos^3 x}-\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)}=\frac{(\tan x-1)(\tan^2 x+1)}{2\tan^3 x-(\tan^2 x+1)}$$

$$=\frac{(m-1)(m^2+1)}{2m^3-m^2-1}=\frac{m^2+1}{2m^2+m+1}.$$

Câu 13. Chọn **C.**

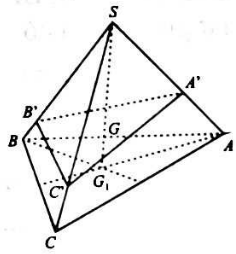
Giả sử $S.ABCD$ là chóp tứ giác. Gọi A',B',C',D' lần lượt là trung điểm của các đoạn SA, SB, SC, SD và M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của các đoạn AB, BC, CD, DA. Khi đó các mặt phẳng sau đây có tính chất cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp:



$(A'B'C'D')$, $(A'B'NQ)$, $(C'D'QN)$, $(A'D'PM)$, $(B'C'PM)$. Vậy có tất cả có 5 mặt phẳng.

Câu 14. Chọn **C.**

Gọi G_1 là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó



$$\overrightarrow{SG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{SG_1}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}).$$

Do $G\in(A'B'C')$ nên tồn tại $x, y, z\in\mathbb{R}$, $x+y+z=1$ sao cho

$$\overrightarrow{SG}=x\overrightarrow{SA'}+y\overrightarrow{SB'}+z\overrightarrow{SC'}=xm\overrightarrow{SA}+yn\overrightarrow{SB}+zp\overrightarrow{SC}.$$

So sánh hai đẳng thức trên ta suy ra

$$\left(xm-\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{SA}+\left(yn-\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{SB}+\left(zp-\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{SC}=\vec{0}.$$

Nhưng do $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}$ là ba vectơ không đồng phẳng nên đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi

$$xm=yn=zp=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{4m},\ y=\frac{1}{4n},\ z=\frac{1}{4p}.$$

Từ đây và do $x+y+z=1$ ta thu được

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=4.$$

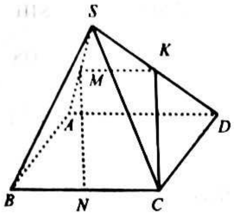
Câu 15. Chọn **D.**

Gọi S là tổng cần tính. Từ công thức khai triển nhị thức Newton chúng ta dễ dàng thấy

$$(1+2)^{99}+(1-2)^{99}=2S \Rightarrow S=\frac{3^{99}-1}{2}.$$

Câu 16. Chọn **A.**

Gọi K là trung điểm của SD. Dễ thấy tứ giác $MNCK$ là hình bình hành. Suy ra $MN \parallel KC$. Do đó góc giữa MN và SC chính là $\widehat{KCS}$. Tam giác SCD đều có CK là trung tuyến nên $CK \perp SD$. Từ đó



$$\sin\widehat{KCS}=\frac{SK}{SC}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{KCS}=30^0.$$

Câu 17. Chọn **A.**

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)+\frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)\le 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{1}{2}+\log_2(\log_2 x)+\frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)\le 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2(\log_2 x)\le 3 \Leftrightarrow \log_2(\log_2 x)\le 2$$

$$\Leftrightarrow 0<\log_2 x\le 4 \Leftrightarrow 1<x\le 16.$$

Câu 18. Chọn **D.**

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1}+n \\ &= u_{n-2}+(n-1)+n \\ &= u_{n-3}+(n-2)+(n-1)+n \\ &= \dots \\ &= u_1+2+3+\dots+n \\ &= 1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$

Câu 19. Chọn **D.**

Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow \overline{z}=a-bi$. Thế thì

$$\frac{|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|}{|z|}=\frac{|2a|+|2bi|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\le\frac{2\sqrt{2(a^2+b^2)}}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|a|=|b|$. Mặt khác

$$\frac{2\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $b=0$.

Như vậy ta có $2\le\frac{|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|}{|z|}\le 2\sqrt{2}.$

Câu 20. Chọn **A.**

Ta viết lại hàm số đã cho thành

$$\begin{aligned} f(x) &= nx^2-2(1+2+\dots+n)x+1^2+2^2+\dots+n^2 \\ &= nx^2-n(n+1)x+1^2+2^2+\dots+n^2 \\ &= n\left[x^2-2.\frac{n+1}{2}.x+\frac{(n+1)^2}{4}\right]-\frac{n(n+1)^2}{4}+ \\ &\qquad +1^2+2^2+\dots+n^2 \\ &= n\left(x-\frac{n+1}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)^2}{4}+1^2+2^2+\dots+n^2 \\ &\ge -\frac{n(n+1)^2}{4}+1^2+2^2+\dots+n^2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{n+1}{2}.$

Câu 21. Chọn **C.**

d_1 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(2,3,1)$, tương ứng với d_2 có $\vec{u}_2=(1,5,-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng cách đều d_1 và d_2 thì (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(-11,5,7)$. Lấy điểm $A(-1,1,2)\in d_1$ và $B(2,-2,0)\in d_2$. Trung điểm của đoạn AB là $I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$. (P) đi qua I nên có phương trình là

$$(P): -11x\left(x-\frac{1}{2}\right)+5\left(y+\frac{1}{2}\right)+7(z-1)=0$$

$$\Leftrightarrow -11x+5y+7z+1=0.$$

Câu 22. Chọn **D.**

Ta biến đổi như sau

$$\begin{cases}\frac{1}{3}\log_3|a|+\log_3|b|=5\\ \log_3|a|+\frac{1}{3}\log_3|b|=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3|a|=6\\ \log_3|b|=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|=729\\ |b|=27\end{cases}.$$

Câu 23. Chọn **D.**

Phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=-m^2+9m+10.$$

Phương trình này là phương trình của một mặt cầu khi và chỉ khi $-m^2+9m+10>0\Leftrightarrow -1<m<10.$

Câu 24. Chọn A.

Gọi a, b, c $(1 \le a < b < c \le 20)$ tương ứng là vị trí của 3 cuốn sách lấy được. Để giữa hai cuốn lấy được bất kì luôn có ít nhất hai cuốn không được lấy thì điều kiện cần và đủ là $b-a>2$ và $c-b>2$. Tức là $5 \le a+4 < b+2 < c \le 20$. Như vậy số cách lấy ra 3 cuốn sách thỏa mãn yêu cầu chính là số cách lấy ra 3 số nguyên dương trong 16 số (từ 5 tới 20 có tất cả 16 số) và bằng C_{16}^{3}.

Câu 25. Chọn B.

Ta biết rằng số đỉnh của hình lăng trụ luôn là một số chẵn. Giả sử một hình lăng trụ có $2n$ đỉnh. Khi đó số cạnh của hình lăng trụ đó sẽ bằng $3n$. Theo bài ra ta có $2n+3n=200 \Leftrightarrow n=40$. Vậy lăng trụ đó có 80 đỉnh.

Câu 26. Chọn A.

Gọi S là tổng cần tính. Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân ta có

$$S=\frac{1-\dfrac{1}{i^{2020}}}{1-\dfrac{1}{i}}=\frac{i^{2020}-1}{i^{2020}-i^{2019}}=\frac{(-1)^{1010}-1}{i^{2020}-i^{2019}}=0.$$

Câu 27. Chọn D.

Trước hết ta viết lại hàm số đã cho thành

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right).$$

Từ đó $f^{(n)}(x)=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right].$

Dễ dàng thấy rằng nếu $y=\dfrac{1}{ax+b}$ thì

$$y^{(n)}=\frac{n!(-a)^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

Áp dụng kết quả này ta được

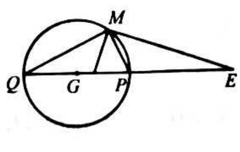
$$f^{(n)}(x)=\frac{n!(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

Suy ra

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{(-1)^{n+1}}-1\right]=\frac{-n![1+(-1)^n]}{2}.$$

Câu 28. Chọn C.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ (điểm E như thế luôn tồn tại duy nhất).



Khi đó đẳng thức trên tương đương với $\left|3\overrightarrow{MG}\right|=\left|\overrightarrow{ME}\right|$ hay $3MG=ME$. Trên đường thẳng GE ta lấy hai điểm P, Q thỏa mãn $3PG=PE$, $3QG=QE$. Khi đó quỹ tích điểm M thỏa mãn yêu cầu là đường tròn đường kính PQ.

Câu 29. Chọn B.

Ta có $\ln 2=\displaystyle\int_a^2\frac{1}{x^3+x}dx=\int_a^2\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$

$$=\left(\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Bigg|_a^2=\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\Bigg|_a^2=\ln\frac{2\sqrt{a^2+1}}{a\sqrt{5}}.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{2\sqrt{a^2+1}}{a\sqrt{5}}=2 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

Câu 30. Chọn B.

Để đồ thị có 2 điểm cực trị thì PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt. Ta tìm được điều kiện $m<0$ hoặc $m>\dfrac{14}{33}$. Khi đó đường thẳng nối hai điểm cực trị có phương trình là

$$y=\frac{[mx^2+(4-2m)x-6]'}{[2(x+9)]'}=mx+2-m.$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng này là

$$h=\frac{|2-m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{\frac{(2-m)^2}{m^2+1}}\Rightarrow(m^2+1)h^2=m^2-4m+4$$

$$\Rightarrow(h^2-1)m^2+4m+h^2-4=0. \qquad (*)$$

Khi $h=1$ thì $m=\dfrac{3}{4}$. Khi $h\neq 1$ thì (*) là phương trình bậc hai của m. Điều kiện cần và đủ để phương trình này có nghiệm là $\Delta'=4-(h^2-1)(h^2-4)\ge 0$

$$\Rightarrow h^2(h^2-5)\le 0\Rightarrow h\le\sqrt{5}.$$

Khi $h=\sqrt{5}$ thì $4m^2+4m+1=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 31. Chọn A.

Gọi r, h, V tương ứng là bán kính đáy, chiều cao và thể tích của khối trụ. Ta dễ dàng thấy $r^2+\dfrac{h^2}{4}=R^2$.

Và từ đó $V=\dfrac{\pi}{3}hr^2=\dfrac{\pi}{3}h\left(R^2-\dfrac{h^2}{4}\right)$.

Bây giờ sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$V^2=\frac{\pi^2}{9}h^2\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)^2=\frac{2\pi^2}{9}\cdot\frac{h^2}{2}\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)$$

$$\le\frac{2\pi^2}{9}\cdot\frac{1}{27}\left[\frac{h^2}{2}+\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)+\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)\right]^3=\frac{16\pi^2}{243}R^6.$$

Suy ra $V\le\dfrac{4\pi}{9\sqrt{3}}R^3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{h^2}{2}=R^2-\frac{h^2}{4}\Rightarrow h^2=\frac{4}{3}R^2\Rightarrow h=\frac{2}{\sqrt{3}}R.$$

Câu 32. Chọn **C.**

Trước hết ta có

$$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=1.$$

Áp dụng kết quả này ta được

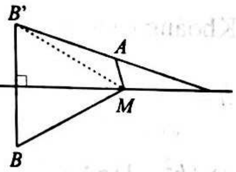
$$f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{2}{100}\right)+...+f\left(\frac{99}{100}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{49}\left[f\left(\frac{k}{100}\right)+f\left(1-\frac{k}{100}\right)\right]+f\left(\frac{1}{2}\right)=49+\frac{1}{2}=\frac{99}{2}.$$

Câu 33. Chọn **B.**

Để tích các số chấm xuất hiện ở năm lần gieo là một số tự nhiên có tận cùng bằng 5 thì phải có ít nhất một lần ra mặt 5 chấm và các mặt khác ra mặt lẻ. Do đó xác suất cần tìm bằng $\dfrac{3^5-2^5}{6^5}=\dfrac{211}{7776}$.

Câu 34. Chọn **B.**



Dễ thấy A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (xOy). Gọi B' là điểm đối xứng với B qua (xOy). Thế thì $B'(-1,4,3)$ và $MB=MB'$. Khi đó

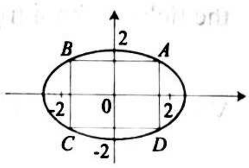
$$|MA-MB|=|MA-MB'|\le AB'.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M, A, B' thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn AB'. Như vậy điểm M cần tìm là giao điểm của đường thẳng AB' và mặt phẳng (xOy). Đường thẳng AB' có phương trình

$$AB':\frac{x-3}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

Từ đó tìm được $M(5,1,0)$.

Câu 35. Chọn **A.**



Giả sử $ABCD$ là hình vuông nội tiếp elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Khi đó các đỉnh A, B, C, D phải nằm trên một trong hai đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ hai. Giả sử $A(m,m)$ với $m>0$. Khi đó $AB=2m$ và $S_{ABCD}=4m^2$. Mà $A(m,m)\in(E)$ nên ta có $\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}=1$

$$\Rightarrow m^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Câu 36. Chọn **B.**

Từ $\cot x-\cot y=5\Rightarrow\dfrac{1}{\tan x}-\dfrac{1}{\tan y}=5$

$\Rightarrow\dfrac{\tan y-\tan x}{\tan x\tan y}=5.$ Kết hợp với $\tan x-\tan y=10$ thì ta được $\tan x\tan y=-2$. Do đó

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}=\frac{10}{1-2}=-10.$$

Câu 37. Chọn **C.**

Áp dụng liên tiếp công thức $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$ ta được

$$C_9^9+C_{10}^9+...+C_{99}^9=\underbrace{C_{10}^{10}+C_{10}^9}+...+C_{99}^9$$

$$=\underbrace{C_{11}^{10}+C_{11}^9}+...+C_{99}^9$$

$$=\underbrace{C_{12}^{10}+C_{12}^9}+...+C_{99}^9$$

$$=...$$

$$=C_{99}^{10}+C_{99}^9=C_{100}^{10}.$$

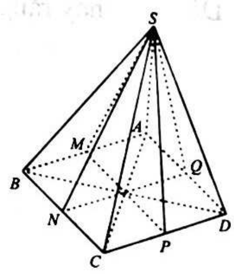
Câu 38. Chọn **A.**

Dễ dàng kiểm tra được điểm A nằm trong khối cầu (S). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm O của (S) tới (P) là lớn nhất. Mà $d(O,(P))\le OA$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A là hình chiếu của O trên (P). Khi đó (P) sẽ nhận $\overrightarrow{OA}=(0,-1,2)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy

$(P):0(x-0)-1(y+1)+2(z-2)=0\Leftrightarrow y-2z+5=0.$

Câu 39. Chọn **D.**

Giả sử $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, BC, CD, DA. Khi đó các mặt phẳng sau đây đều là mặt phẳng đối xứng của hình chóp: (SAC), (SBD), (SMP), (SNQ). Vậy có tất cả 4 mặt đối xứng.



Câu 40. Chọn **B.**

Số cách rút hai thẻ chẵn là C_{10}^2.

Số cách rút ra hai thẻ trong đó có một thẻ ghi số chia hết cho 4 còn thẻ kia ghi số lẻ là $C_5^1C_{10}^1$.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{C_{10}^2+C_5^1C_{10}^1}{C_{20}^2}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 41. Chọn **D.**

Theo một kết quả cơ bản của hình học vectơ ta có

$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SG}.$$

Bình phương hai vế ta được

$9SG^2 = SA^2 + SB^2 + SC^2 + 2\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\widehat{ASB} + 2bc\cos\widehat{BSC} + 2ca\cos\widehat{CSA}$
$= a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc.$

Từ đó $SG = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc}.$

Câu 42. Chọn **A.**

Đặt $\sqrt{4-x^2} = t$ thì $x^2 = 4 - t^2$ và $0 \le t \le 2$. Hàm số đã cho trở thành $y = f(t) = -t^2 + t + 4.$

Bằng cách lập bảng biến thiên của hàm số này trên đoạn $[0, 2]$ ta dễ dàng tìm được

$$\max_{-2\le x\le 2} y = \max_{0\le t\le 2} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4};$$

và $\min\limits_{-2\le x\le 2} y = \min\limits_{0\le t\le 2} f(t) = \min\{f(0), f(2)\} = 2.$

Từ đó $M + m = \frac{17}{4} + 2 = \frac{25}{4}.$

Câu 43. Chọn **C.**

Dễ thấy

$$\begin{cases}\sin^3 x \le \sin^2 x \\ \cos^5 x \le \cos^2 x\end{cases} \Rightarrow \sin^3 x + \cos^5 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin x = 1$ hoặc $\cos x = 1$. Do đó $M = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 1.$

Tương tự

$$\begin{cases}\sin^3 x \ge -\sin^2 x \\ \cos^5 x \ge -\cos^2 x\end{cases} \Rightarrow \sin^3 x + \cos^5 x \ge -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin x = -1$ hoặc $\cos x = -1$. Do đó $m = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = -1$. Vậy $M - m = 2.$

Câu 44. Chọn **B.**

Đường thẳng AB có phương trình là

$$(2-a)x + (1+a)y - 2 - a^2 = 0.$$

Khoảng cách từ O tới đường thẳng AB bằng

$$h = \frac{2+a^2}{\sqrt{(2-a)^2 + (1+a)^2}} = \frac{2+a^2}{\sqrt{5 - 2a + 2a^2}}.$$

$$AB = \sqrt{(a+1)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{2a^2 - 2a + 5}.$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\cdot h \cdot AB = 1 + \frac{a^2}{2} \ge 1.$$

Diện tích tam giác OAB đạt gia trị nhỏ nhất bằng 1 khi $a = 0$.

Câu 45. Chọn **C.**

• TH1: Số tự nhiên đó không có chữ số 0. Khi đó ta chọn 5 chữ số từ các chữ số 1, 2, …, 9 thì có C_9^5 cách. Có 2 cách sắp xếp các chữ số này theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần. Suy ra trường hợp này có $2C_9^5$ số.

• TH2: Số tự nhiên đó có chữ số 0. Khi đó 0 phải ở vị trí cuối cùng và các chữ số sẽ theo thứ tự giảm dần. Suy ra trường hợp này có C_9^4 số.

Như vậy có tất cả là $2C_9^5 + C_9^4$ số.

Câu 46. Chọn **B.**

Đặt $z = \frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+3i}{2} \Rightarrow 2z + 1 = 3i$

$\Rightarrow (2z+1)^2 = (3i)^2 \Rightarrow 2z^2 + 2z + 5 = 0.$

Điều này chứng tỏ z là một nghiệm (phức) của phương trình $2x^2 + 2x + 5 = 0$.

Từ đó suy ra $\min(a+b+c) = 2 + 2 + 5 = 9.$

Câu 47. Chọn **C.**

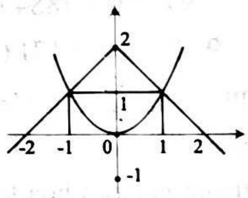
Đặt $2^{\log_3 x} = t > 0$, phương trình trở thành

$$t^3 - 3t = m.$$

Bằng cách lập bảng biến thiên của hàm $f(t) = t^3 - 3t$ trên khoảng $(0, +\infty)$ chúng ta dễ dàng thấy rằng phương trình có nhiều hơn một nghiệm (chính xác hơn là có hai nghiệm) khi và chỉ khi $-2 < m < 0$.

Câu 48. Chọn **C.**

Gọi S là diện tích của miền cần tính. Từ hình vẽ và do tính đối xứng ta có



$$S = 2\int_0^1 (2 - x - x^2)dx = \frac{7}{3}.$$

Câu 49. Chọn **C.**

Vì 2^k có 100 chữ số nên

$$10^{99} \le 2^k < 10^{100} \Leftrightarrow 99 \le k\lg 2 < 100 \Leftrightarrow \frac{99}{\lg 2} \le k < \frac{100}{\lg 2}$$

hay $329 \le k \le 332$. Tức là có 4 giá trị nguyên dương của k thỏa mãn.

Câu 50. Chọn **B.**

Áp dụng kết quả cơ bản $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{a^x} = \ln a$ ta được

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)(3^x-1)\ldots(n^x-1)}{x^{n-1}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{3^x-1}{x}\cdots\frac{n^x-1}{x}\right)$$
$$= \ln 2 \ln 3 \ldots \ln n.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)